FIKIRA
REVUE AFRICAINE

N°08
Janvier 2026

Savoirs en crise, humanité en devenir

ISSN : 3125-1722

FIKIRA-REVUE AFRICAINE

N°08
Janvier 2026

Savoirs en crise, humanité en devenir

ISSN : 3125-1722

PRÉSENTATION DE LA REVUE

La Revue *Fikira* tire son nom d'un mot swahili – langue la plus parlée d'Afrique avec plus de 200 millions de locuteurs – qui signifie « pensée » ou « réflexion ». C'est à l'initiative de Babacar Mbaye Diop, alors doctorant, que la revue a été fondée le 15 mai 2005 à Rouen (France) par un collectif de jeunes chercheurs de diverses nationalités.

Fikira -Revue africaine se veut avant tout le reflet de travaux de recherche en cours, un espace de débat intellectuel et un lieu d'expression privilégié pour les jeunes chercheurs travaillant sur l'Afrique.

Après plus d'une décennie d'interruption, la revue reprend aujourd'hui ses activités et adopte désormais un format exclusivement en ligne. Elle conserve cependant les mêmes ambitions fondatrices : contribuer à la construction et au rayonnement des Lettres, des Sciences humaines et sociales en Afrique et dans la diaspora. Elle s'intéresse à un large éventail de disciplines – histoire, géographie, sociologie, économie, philosophie, arts, esthétique, littérature, linguistique, entre autres – et entend publier des articles scientifiques, des notes de lecture sur les parutions récentes, tout en renforçant la visibilité internationale des travaux de jeunes chercheurs.

La revue ambitionne également de dynamiser les échanges savants et de mettre à la disposition des universitaires et des étudiants un véritable outil de travail. Elle encourage la soumission de contributions originales et de qualité, favorise le croisement des approches et promeut le décloisonnement disciplinaire. Les articles et communications scientifiques provenant d'universitaires d'Afrique et d'ailleurs sont les bienvenus. Toute contribution soumise au comité de rédaction fait l'objet d'une évaluation par des spécialistes membres du comité de lecture.

Pour toute information, contacter :
Tel : +221779579815/ +221771610126
Email : revuefikira@gmail.com, tafsirbaba@hotmail.fr, douc1samba@gamil.com

Table des matières

Chapitre 2
Logique et mathématiques chez Boole et Frege

Malick BADJI
Enseignant-chercheur –UCAD/Dép. Philosophie
badjimalick13@gmail.com

Résumé : Depuis l'Antiquité grecque jusqu'au XVIIIe siècle, les mathématiques, en raison de leur exactitude, ont été considérées comme le modèle par excellence de scientificité. Plusieurs philosophes et mathématiciens ont ainsi défendu l'idée que toutes les sciences, y compris la logique, devaient être ramenées à des procédures mathématiques. Cette position se retrouve notamment chez Leibniz et chez George Boole, qui propose une analyse algébrique de la logique. Toutefois, la crise des fondements mathématiques, provoquée par l'apparition des géométries non euclidiennes, remet en cause cette suprématie. Les mathématiques ne sont plus perçues comme une science a priori, et la primauté revient désormais à la logique, comprise comme science des raisonnements valides. Le projet de Frege s'inscrit dans cette perspective, en cherchant à réduire les mathématiques aux procédures de la raison pure. Ainsi, malgré son inspiration mathématique, la logique contemporaine demeure la science fondamentale sur laquelle reposent toutes les autres.
Mots Clés : Logique, mathématiques, algèbre, logicisme

Abstract: From ancient Greece to the eighteenth century, mathematics, because of its exactness, was regarded as the supreme model of scientific knowledge. Several philosophers and mathematicians therefore defended the idea that all sciences, including logic, should be reduced to mathematical procedures. This position can be found in the work of Leibniz and George Boole, who proposed an algebraic analysis of logic. However, the crisis of the foundations of mathematics, triggered by the emergence of non-Euclidean geometries, challenged this supremacy. Mathematics was no longer perceived as an a priori science, and primacy shifted to logic, understood as the science of valid reasoning. Frege's project fits within this perspective, as he sought to reduce mathematics to the procedures of pure reason. Thus, despite its mathematical inspiration, contemporary logic remains the fundamental science upon which all others rest.
Keywords: Logic, mathematics, algebra, logicism.

Introduction

Le XVII^{e} siècle a été la période pendant laquelle les mathématiques étaient en plein essor. La clarté et la rigueur des démarches mathématiques avaient fait l'unanimité au point que, pour certains mathématiciens, toutes les autres sciences, et particulièrement la logique, devaient s'en approcher pour s'inspirer de leur modèle. C'est dans ce sens que George Boole a tenté d'habiller la logique des signes mathématiques afin de traiter algébriquement la pensée. Cependant, au XIX^{e} siècle, lorsque des mathématiciens avaient tenté de démontrer, à travers le raisonnement par l'absurde, le 5^{e} postulat d'Euclide, ils s'étaient rendus compte qu'il n'existe aucune contradiction lorsqu'on pose, comme hypothèse, qu'il n'y a aucune droite parallèle à la droite donnée ou qu'il en existe une infinité. Ce qui constitue un paradoxe quant au principe de non contradiction, un des piliers des fondements mathématiques. Ainsi, avec la découverte des géométries nouvelles, non-euclidiennes, aussi cohérentes où ne figurerait pas le cinquième postulat d'Euclide, les mathématiques, notamment la géométrie euclidienne perd le privilège d'être la vraie et la seule possible, parce que correspondant à la réalité. À la conception d'une vérité-correspondance, c'est-à-dire en adéquation avec la réalité, se substitue celle de la vérité comme validité qui renvoie à la cohérence interne d'un système en accord avec ses propres prémisses. Nous assistons ainsi à la crise des fondements mathématiques qui remet en question tout l'édifice mathématique, étant entendu que, perçues comme paradigme parfait de scientificité, la conception des mathématiques comme un édifice unique empêchait d'envisager une quelconque pluralité de systèmes.

Dans le but de dépasser cette crise, Frege, en philosophe de la pensée et du langage, préconise, non seulement, de revenir aux fondements des mathématiques, mais aussi de revoir la structure même du langage mathématique. Or, la recherche des fondements ainsi que celle d'une langue formulaire de la pensée, relèvent de la démarche philosophique. Dès lors, avec Frege, la solution à apporter à cette crise repose sur la logique qui trouve ses fondements dans la conjugaison de la philosophie et des mathématiques. Ainsi, la logique qui, jusqu'au XIX^{e} siècle, était plus une affaire de la philosophie plutôt que des mathématiques, va s'assurer des inférences mathématiques. Elle redevient pour ainsi dire la reine des sciences, et Frege, malgré sa foi inébranlable en la possibilité pour les mathématiques de s'approcher plus que n'importe quelle science de leur idéal, ne se doute pas de les reconstruire à partir des seules ressources du raisonnement. Dans cette tentative de rénovation, c'est tout le projet de Frege qui se réduit à la résolution constante de placer la logique au cœur du système des mathématiques. Il ne s'agit plus pour les mathématiques de prêter à la logique leurs méthodes et leurs symboles, c'est à la logique de doter aux mathématiques des fondements inébranlables. Cette entreprise de logicisation des mathématiques semble être justifiée, en ce sens que la démarche mathématique se réduit principalement à deux choses à savoir la définition et l'inférence. Or, celles-ci, sont par excellence de la compétence de la logique qui, comme science des raisonnements valides, est à même de garantir aux mathématiques des fondements solides. Car, dans le processus d'axiomatisation, le mathématicien construit par définitions nominales et déductions, le logicien analyse jusqu'à l'indéfinissable et l'indémontrable. Ainsi, Frege rompt avec une démarche défendue par George Boole. De la mathématisation de la logique, il passe à la logicisation des mathématiques. Sur quelles propriétés mathématiques Boole se fonde-t-il pour vouloir réduire la logique aux mathématiques ? En tant que science du raisonnement valide, la logique n'est-elle pas plus apte à fournir des fondements solides aux mathématiques ? Notre hypothèse consistera à dire, au-delà d'admettre le mérite des mathématiques dans le dévoilement du réel, que la solidité de l'édifice mathématique dépend inéluctablement de la logique en tant que science des fondements solides.

Dans cet article, il consiste dans le premier point de faire mention de la tentative de mathématisation de la logique chez George Boole. C'est-à-dire de présenter le modèle mathématique comme modèle parfait sur lequel doit reposer l'édifice scientifique. Dans le second point, il est question de montrer, avec Frege, que la logique doit être au cœur du système des mathématiques. Il s'agit ici de mettre en évidence le logicisme frégéen qui n'est autre que le projet de réduction des mathématiques à la logique.

I. **La tentative de mathématisation de la logique chez George Boole**

L'exactitude des procédures mathématiques et l'efficacité de leurs résultats ont fini, au XVII^e siècle, par mettre dans une mauvaise posture la logique, essentiellement restée au prisme du formalisme béat. Telle une science formelle, la logique classique d'inspiration aristotélico-scolastique connaîtra une critique sans complaisance. Pour René Descartes, le syllogisme, tel qu' élaboré par Aristote, ne nous apprend rien, sinon à dire à autrui ce qu'il sait déjà. Cela peut sembler vrai, quand on sait que le syllogisme est perçu comme « un discours dans lequel, certaines choses étant données, quelque chose d'autre que ces données en résulte nécessairement, en vertu même de ces données » (Aristote, Topiques, I, 1 et 12). Ainsi, l'objectivité du discours est garantie par la forme du syllogisme, puisque la conclusion est nécessairement tirée des prémisses déjà posées. C'est pourquoi, selon Descartes, dans le syllogisme aristotélicien, c'est plus la forme qui est mise en avant que la vérité du résultat. Or, c'est ce caractère formel, stérile et inefficace, qui est rejeté par les penseurs de la Renaissance et du XVII^e siècle. C'est dans ce décor de discrédit qu'il faut comprendre le sens de la tentative, à partir des ressources mathématiques, de la réhabilitation de la logique avec Leibniz et un peu plus tard avec George Boole.

Dans une perspective de création d'une langue universelle, Leibniz envisage de prendre comme modèle le langage mathématique. Sur ce, avec un esprit résolument de réhabilitation, il ne rejette pas la logique classique, étant entendu que, pour lui, les syllogismes peuvent être perçus comme une des plus belles créations de l'esprit humain. En tant que mathématicien-logicien, il voit les syllogismes comme une espèce de mathématique universelle dont l'importance n'est pas assez connue. Ainsi, la logique classique serait, pour lui, une ébauche de la logique générale à la réalisation de laquelle il se projette. À ce propos, il déclare :

> Je dois reconnaître, il est vrai, que, jusqu'à présent, toutes nos logiques sont à peine une ombre de ce que je souhaite qu'elles soient et que, en quelque sorte, j'entrevois de loin ; mais je dois également reconnaître par respect de la vérité, et pour rendre justice à ceux qui le méritent, que j'ai trouvé aussi beaucoup de choses bonnes et utiles dans la logique traditionnelle (R. Blanché,

> 1970, p. 192).

Ces propos de Leibniz s'inscrivent dans une perspective d'élargir les formes restreintes du syllogisme. Pour réussir cette refonte, Leibniz met les procédures mathématiques au cœur du raisonnement de la logique. En réalité, il s'agit pour lui d'emprunter les signes et la méthode mathématiques pour traiter mathématiquement le modèle logique. Cette entreprise de mathématisation universelle nécessite un symbolisme précis et opératoire. Il s'agit d'« un système de formes qui domine ces formes spéciales, qui les retrouve comme des cas particuliers d'un calcul vraiment universel, applicable à tout le domaine de la pensée » (R. Blanché, 1970, p. 192). À travers ces mots, c'est la vraie vocation de la *lingua caracteristica universalis* et du *calculus ratiocinator* que Robert Blanché présuppose. La langue caractéristique universelle suppose, chez Leibniz, un système de signes coordonnés autour d'une syntaxe différente de celle des langues naturelles.

> C'est-à-dire une caractéristique réelle qui soit en rapport direct avec les choses sans passer par l'intermédiaire des mots et une caractéristique logique dont la syntaxe soit affranchie des contingences des grammaires empiriques, bref une écriture rationnelle qui soit avant tout un instrument de la raison (R. Blanché, 1970, p. 204).

C'est dans ce sillage que s'inscrit le calcul rationnel qui, dans la suite de la langue caractéristique, se propose de calculer les pensées dont les raisonnements sont déjà caractérisés. Ainsi « chaque relation ou chaque groupe de relations, caractérisées par leurs propriétés formelles, doit permettre de construire un certain calcul, avec ses axiomes et ses théorèmes propres » (R. Blanché, 1970, p. 209). Et, dans cette tentative de mathématisation de sa langue caractéristique, Leibniz va naturellement choisir le modèle arithmétique qui s'en approche le plus. L'algèbre joue pour ainsi dire le rôle d'écriture rationnelle. Mais, puisqu'elle ne s'applique qu'aux nombres, Leibniz pense à construire une « algèbre générale » pour garantir, entre autres, une écriture universelle. C'est ce souci d'universalisme qui sera à l'origine de la création de la logique binaire qui, inspirée de la rigueur mathématique, va tenir en compte le 0 et le 1 comme valeurs essentielles. Le 1 renvoyant ainsi à la valeur de vérité, c'est-à-dire au *Vrai*, tandis que le 0 représente la valeur du *Faux*. Cependant, cette entreprise leibnizienne d'une mathématique universelle, ambitieuse qu'elle soit, restera comme un projet. De ce point de vue, Robert Blanché affirme que :

> Pour saisir l'immense portée du projet leibnizien d'une caractéristique universelle, il importe de distinguer entre l'idée et sa réalisation. Que Leibniz n'en ait donné que quelques échantillons partiels et très imparfaits, ne doit pas faire méconnaitre l'innovation capitale qu'introduisent en logique l'idée qui inspirait ses essais. Son apparition marque en effet une date capitale dans l'histoire de la logique (R. Blanché 1970, 201).

C'est au XIXe siècle, avec George Boole, que le projet leibnizien d'étendre le champ de logique jusqu'aux frontières des mathématiques, va prendre une allure décisive. En effet, c'est avec les travaux de Boole que la logique va carrément s'approprier du modèle mathématique. Selon Robert Blanché, c'est à lui « qu'on fait généralement l'honneur d'en être l'initiateur. Certes, il avait des précurseurs. Mais ce qui, chez eux, était surtout une belle espérance, assortie de quelques productions fragmentaires, reçoit avec lui une première réalisation » (R. Blanché, 1970, p. 269). La logique, de ce point de vue, n'est plus comme jadis, une science propédeutique à toute initiative scientifique, elle doit se réduire dorénavant aux mathématiques. Dans une perspective de reconstitution, Boole envisage la logique à partir des seules ressources de l'esprit de la mathématique. Servant de forme à des recherches métaphysiques avec Aristote, elle bascule carrément, avec Boole, dans le domaine des mathématiques au point de s'en assimiler. Donc, pour George Boole, « nous ne devons plus associer la logique à la métaphysique, mais aux mathématiques […]. Comme la géométrie, la logique repose sur des vérités axiomatiques, et ses théorèmes sont construits selon la théorie générale du symbolisme qui constitue le fondement de ce qui est reconnu comme l'analyse » (G. Boole, 1948, p. 13). La logique n'a alors rien à voir avec la philosophie, elle doit être associée à la mathématique. Elle est, pour ainsi dire, avec Boole, une logique mathématique qui se réduirait carrément au calcul algébrique. C'est à la rigueur mathématique, et grâce à son symbolisme, de prêter main forte à la logique. Donc, si l'on en croit Robert Blanché, c'est Boole qui, pour la première fois, met en place un système de logique mathématique car,

> Dans ses deux ouvrages, *The mathematical analys of logic, being an essay towards a calculus of deductive* reasoning (1847) et *An investigation of the lows of thought on which are founded the mathematical theories of logic and probabilities* (1854), il présente un système qu'on peut bien, malgré ses imperfections, qualifier d'achevé, en ce sens qu'il apporte, pour la solution de problèmes logiques qui englobent, en les dépassant, ceux auxquels se limitait la logique traditionnelle, ce que nous appellerions aujourd'hui des procédures de décision, permettant des calculs efficaces (Blanché 1970, 269-270).

En effet, pour apporter une solution aux problèmes logiques, il sera désormais question d'habiller la logique des signes mathématiques en vue d'aborder la pensée sous un angle algébrique. Sur ce, Boole procède à un travail de constitution qui consiste à donner à la logique un esprit de la mathématique. Cette entreprise de *science du système intellectuel* marque, de ce fait, la naissance de la logique algébrique. Elle s'attelle à reprendre la logique traditionnelle par les fondements et essaie de lui donner une structure mathématique. Car, selon Souleymane Bachir Diagne, « Boole s'était proposé de constituer une véritable science des opérations de l'entendement, d'exposer les procédures du raisonnement humain sous la forme d'un calcul algébrique » (Boole 1992, 9). Et, le système mathématique dont il s'agit là, n'est pas celui qui s'occupe des idées de nombre et de quantité. Les lois de l'algèbre sont, comme dans la constitution de l'esprit humain, considérées comme des « *lois de la pensée* ». Elles sont relatives aux faits qui résident dans la constitution générale de l'intellect humain, c'est-à-dire que ses calculs peuvent s'exercer à des entités autres que celles des nombres. La logique algébrique n'est, en réalité, de loin l'application à la logique d'un traitement quantitatif, comme le cas de la physique mathématique. C'est dire que la validité des processus de l'analyse de l'algèbre symbolique ne dépend pas de l'interprétation des symboles employés, mais des lois de leur combinaison. Ainsi, dans la suite, Boole, dans un souci de traitement algébrique de la pensée, veut qu'on opère sur des signes, en vue de les classer suivant leur fonction ; et par ailleurs retrouver le semblable de ces fonctions dans les formes du langage naturel, de manière à exprimer celles-ci au moyen des signes identiques aux signes algébriques, et en outre comme ceux-ci, se réduire à un calcul.

C'est ainsi dans une perspective de mise en œuvre d'un système de signes traduisant toutes les opérations du langage considéré comme un instrument de raisonnement, Boole préconise, dans un premier temps, des signes littéraux, tels que x***, y, z****…*qui symbolisent les choses qui sont l'objet de nos conceptions. En réalité, il s'agit ici des noms propres ou communs, des adjectifs, des expressions descriptives, qui peuvent être prises pour représenter les classes. Ensuite, il opte pour les signes d'opération, tels que +**, -,** x qui signifient les opérations de l'esprit par lesquelles les conceptions des choses sont combinées ou résolues. Ces signes d'opération sont ici des mots comme *et, ou, excepté*, qui peuvent représenter les opérations mentales par lesquelles nous combinons des parties en un tout ou séparons un tout en ses parties. Enfin, Boole choisit le signe =, celui de l'égalité qui représente la copule, à travers laquelle nous exprimons des relations entre les classes, simples ou composées, et formons des propositions.

En effet, dans une démarche de réduction des lois logiques aux procédures algébriques, le système booléen favorise une analogie certaine entre les lois de la syntaxe algébrique et celles de la syntaxe logique, c'est-à-dire celles qui règlent la composition de nos conceptions. Or l'analogie entre la pensée ordinaire et le calcul algébrique n'est pas, à tout point de vue, parfaite. Ainsi, dans le langage ordinaire, on peut admettre l'équation $x^n = x$, car des astres combinés à des astres donnent toujours des astres. Mais en algèbre, l'élévation à la puissance donne autre chose que l'équation initiale. Et pour contourner cet écueil, Boole s'approprie les deux racines : le 0 et le 1 qui ignorent carrément la règle d'élévation à la puissance, car en mathématique :

$$0^2 = 0$$
$$1^2 = 1$$

La difficulté ainsi contournée, il semble que la syntaxe logique peut être bien réduite à la syntaxe algébrique, dans laquelle les symboles numériques ne recevraient que les valeurs 0 et 1. Le 1 symbolise la classe universelle, c'est-à-dire le « *Tout* » qui comprend la totalité des êtres, et le 0 symbolise la classe vide, il s'agit du « *Nul »* qui symbolise la non-existence. Ainsi, chez George Boole, nous concevons alors une algèbre où les symboles x, y, z,.. admettent indifféremment les valeurs 0 et 1, et ces valeurs seules. Les lois, les

> axiomes et les procédures d'une telle algèbre seront identiques, en tout point, aux lois, axiomes et procédures d'une Algèbre de la Logique. Elles ne se distingueront que par une différence d'interprétation (Boole 1992, 54-55).

Ainsi, le projet de George Boole, de par ses procédures, présente la volonté manifeste d'une tentative de mathématisation de la logique en vue de rendre faisable un traitement algébrique de la pensée. Or, il s'avère difficile de ramener tous les raisonnements à des équations algébriques. En outre, la naissance des géométries nouvelles va ébranler les fondements des mathématiques. Et, désormais, seule la logique, comme science des fondements valides, peut venir au secours des mathématiques. C'est la position que va adopter Gottlob Frege qui, dans une posture logiciste, passe résolument de l'algèbre de la logique à la logistique.

II. **Frege et la réduction des mathématiques à la logique**

La réduction des mathématiques à la logique chez Gottlob Frege, s'est faite en réaction à l'échec de l'algèbre de la logique à rendre possible un traitement algébrique de la pensée. En effet, dans l'algèbre de la logique, Boole s'était proposé de mettre en place un instrument logique capable de traiter la pensée sur le seul modèle des mathématiques. Il s'agit, en termes clairs, d'un système qui, par sa forme et par sa méthode, se pose comme une logique mathématique, et dans lequel la mathématique s'empare de la logique pour la traiter *more geometrico*. De ce point de vue, la mathématique serait la servante de la logique, en s'attelant à apporter des solutions aux problèmes qu'elle rencontre. En effet, l'algèbre de la logique, telle une théorie mathématique particulière, présuppose la validité des lois logiques de la déduction. C'est dans ce sillage qu'il faut voir la mise en place de l'algèbre binaire dans laquelle les seules valeurs retenues sont le 0 et le 1, auxquelles seraient ramenés tous les raisonnements. Cependant, la croyance que Boole semble vouer aux bienfaits des mathématiques sera battue en brèche par la naissance des géométries non-euclidiennes, lesquelles vont ébranler les fondements des mathématiques. Frege, dans une perspective de reconstitution, se propose d'intégrer le modèle logique dans les procédures mathématiques. Car pour lui,

> Les mathématiques se trouvent actuellement dans un état peu satisfaisant, si on considère, non l'ampleur externe, mais la perfection et la clarté internes. A cet égard, elles laissent plutôt presque tout à désirer, si on les compare avec l'idéal que, non sans raison, on peut se faire de cette science et si l'on songe que, selon sa nature, elle doit être plus apte que toutes les autres sciences à s'approcher de son idéal (Frege 1994, 187).

Les mathématiques, à en croire Frege, constituent pour ainsi dire, une branche essentielle dans la recherche de la vérité. Il ne faut donc pas, sous prétexte de crise au sein de ses fondements, écarter les mathématiques, sous peine de renoncer à leur rigueur. Il serait plus convenable de mettre de la logique dans le déroulement des procédures mathématiques, c'est-à-dire exprimer la mathématique sous une forme logiquement rigoureuse. Avec la logistique, la quête de la vérité, n'est ainsi plus l'affaire des moules algébriques conçues spécialement pour les nombres et les quantités. C'est dire que, désormais, il doit avoir une complémentarité certaine entre les termes logiques et les termes mathématiques. Sur ce point, Ali Benmakhlouf pense, à juste titre, que : « Frege veut à la fois que les notions arithmétiques soient définies en termes logiques et que les notions logiques le soient en termes arithmétiques ou plus largement mathématiques » (Benmakhlouf 2002, 42). Dans une démarche scientifique, il serait, pour Frege, impossible de faire un départ précis entre logique et arithmétique. Chaque philosophe est en effet concerné par la géométrie tout comme chaque mathématicien ne peut pas se passer de la fibre philosophique. Il semblerait, de ce point de vue, malcommode de présenter les notions de concept et d'extension sans pour autant les confronter avec celle de fonction.

> Ainsi le nombre, notion arithmétique, sera défini comme une extension de concept ; mais le concept, notion logique, sera à son tour caractérisé mathématiquement comme une fonction dont les valeurs sont des valeurs de vérité, et les mots logiques comme « tout », « aucun », « quelque » comme des quantificateurs (Benmakhlouf 2002, p.42).

Il existe, en effet, chez Frege une certaine complémentarité entre les notions arithmétiques et les notions logiques. Ainsi, dans sa définition, Frege écarte la fonction du cas où son essence serait caractérisée par la forme de l'expression. La partie de la fonction ne doit pas être prise comme l'essence même de la fonction, c'est-à-dire comme un tout. Il doit y avoir une distinction expresse entre le contenu et la forme de l'expression. Et à Frege « de montrer que l'argument n'appartient pas à la fonction mais que fonction et argument, pris ensemble, constituent un tout complet.

De la fonction, prise séparément, on dira qu'elle est incomplète, ayant besoin d'une autre chose, ou encore insaturée » (Frege, 1971, p. 84). La fonction, pour être saturée, a toujours besoin d'un argument qui se présente comme un nombre, un tout fermé en soi. Ainsi, l'essence de la fonction se trouve liée à l'expression dans laquelle elle se trouve. Si par exemple, dans la fonction suivante : « $2x^2 + x$ », on supprime la lettre « x », on obtiendra cette fonction-ci : « $2. ( )^2 + ( )$ » sans pour autant porter atteinte à l'essence propre de la fonction. Ainsi, la valeur de la fonction est ce que l'on a en complétant la fonction par l'argument. C'est-à-dire, par exemple que 10 est la valeur de la fonction $2x^2 + x$ pour l'argument 2 car, $2.2.2 +2 = 10$.

Ainsi définie, la fonction semble très proche du concept, notion logique, car tous deux présentent un caractère insaturé. D'ailleurs, il existe des fonctions de premier et de second ordre, tout comme il existe des concepts de premier et de second ordre. Et, une fonction de premier ordre est saturée par une fonction de second, comme un concept de premier ordre tombe sous le concept de second ordre. Toutefois, le concept ne doit pas être assimilé à l'objet qui est saturé et fermé sur soi. Car, un concept dénote toujours un prédicat, tandis que l'objet dénote toujours un sujet. C'est dire qu'un concept peut subsumer des objets et un objet ne peut pas subsumer un concept, même si celui-ci subsume un et seul objet. Sur ce, en effet, la valeur de vérité d'un objet est déterminée en fonction de la satisfaction du concept. Et, de ce point de vue, les arguments satisfaisant une fonction, doivent être pris comme des objets tombant sous un concept. Ainsi, si la valeur de la fonction « $x^2 = 1$ » pour l'argument -1, est le vrai, alors « -1 tombe sous le concept racine carrée de 1 ». Si en revanche, la valeur de la fonction « $x^2 = 1$ » pour l'argument 2, est le faux, donc « 2 ne tombe pas sous le concept racine carrée de 1 ». En logique par conséquent, le concept est étroitement lié à la fonction, car un concept est une fonction dont la valeur est toujours une valeur de vérité.

Dans le sillage de l'inter-définissabilité entre les notions logiques et les notions arithmétiques, Frege présente les notions : « tout », « aucun » et « quelque » comme des quantificateurs. En déphasage avec l'acception aristotélicienne, ces notions vont prendre, avec lui, une tournure mathématique. Car, avec Aristote, toutes les propositions possibles se réduisent principalement à quatre types : l'universelle affirmative : *tout*, la particulière affirmative : *quelque*, l'universelle négative : *aucun*, et la particulière négative : *quelque*. Pour ainsi passer du sens de la proposition à sa valeur de vérité, Frege réduit ces notions logiques aux procédures mathématiques. Ainsi, l'universelle affirmative, tout comme l'universelle négative, se réduisent à : « *quel que soit* ». Et, pour la proposition : « Tout philosophe est logicien », on aura ceci avec Frege : *Quel que soit l'individu x que je considère si x est philosophe alors x est logicien.* En termes mathématiques, on aura : $\forall x\, [P(x) \rightarrow L(x)]$. La particulière affirmative, tout comme la particulière négative se réduisent à : « *il existe* ». Et la proposition : « Certain logicien est philosophe », donne avec Frege ceci : *Il existe un individu x tel que x est logicien et x est philosophe.* Et elle se traduit en termes mathématiques comme suit : $\exists x\, [L(x) \wedge P\,(x)]$.

Ainsi les quantificateurs sont-ils conçus comme des fonctions ? L'énoncé « Socrate est mortel » résulte de la forme d'énoncé « x est mortel » qui prend la valeur *Vrai* pour tout attribut de x. En revanche, l'énoncé « il existe un mortel » résulte de la forme d'énoncé « certain x est mortel » qui ne prend pas toujours la valeur *Faux* pour tout attribut de x.

Dans cette tentative d'inter-définissabilité entre termes logiques et termes mathématiques, Frege n'entend cependant pas mathématiser la logique à la manière booléenne. Il entend, au contraire, modifier l'*organon* logique pour qu'il puisse fonder les mathématiques par les seules ressources de la pensée pure. C'est dans ce sens qu'il faut inscrire sa tentative de redéfinition des notions arithmétiques fondamentales par les seules ressources de la logique et la traduction des axiomes et règles d'inférence mathématiques en axiomes et règles d'inférence logiques. Contre le psychologisme et l'empirisme, Frege plaide en faveur de l'objectivité du nombre. Le nombre est autant réel que « *la mer du Nord* », il ne dépend pas de notre structure mentale encore moins de notre expérience du monde. Toutefois, il convient de noter que, chez Frege la notion d'objectivité n'est en aucune manière synonyme de réalité physique. L'objectivité dont il s'agit ici, est celle qui est liée à la raison, de sorte qu'elle n'est ni subjective ni physique. Frege la définit en ces termes :

> Par objectivité, j'entends indépendance par rapport à nos sensations, intuitions et représentations, par rapport aux ébauches d'images intérieures qui nous viennent des souvenirs d'impressions passées, mais non indépendance par rapport à la raison. Prétendre dire ce que sont les choses indépendamment de la raison, ce serait prétendre juger sans juger, laver le cuir sans le mouiller (G. Frege,1969, p. 155).

Le nombre, comme objectif, prend une acception logique et de ce point de vue, il aura une relation étroite avec le concept. C'est dire que donner un nombre, c'est dire quelque chose d'un concept. Ainsi, si le nombre 0 appartient à un concept, quel que soit ***a***, il est toujours vrai que ***a*** n'est pas subsumé par ce concept. Et, par analogie, si le nombre 1 appartient au concept F, quel que soit ***a***, il n'est pas toujours vrai que ***a*** ne tombe pas sous ce concept. Sur ce, le nombre désigne non seulement un objet mais aussi présente une propriété de concept. C'est le concept qui, par conséquent, subsume toujours l'objet. C'est pour cela que, chez Frege, ce sont les notions arithmétiques qui doivent se réduire aux notions logiques. Et à ce propos, il déclare :

> j'espère avoir dans cet écrit vraisemblable l'idée que les lois de l'arithmétique sont des jugements analytiques, et par conséquent a priori. L'arithmétique serait donc simplement une logique développée, et chaque proposition arithmétique une loi logique, bien que dérivée (Frege 1969, 155).

Donc, il serait possible avec Frege de réduire entièrement la rationalité arithmétique à la rationalité logique et de voir que cette discipline mathématique a besoin de la rigueur déductive de la logique. Ainsi, si les principes fondamentaux de l'arithmétique sont des lois logiques, alors les mathématiques seraient analytiques et déductives et non synthétiques *a priori*, c'est-à-dire fondées sur des intuitions pures comme le pensait Kant.

Conclusion

Si l'objectif de cet article consistait à étudier les rapports entre les mathématiques et la logique chez George Boole et chez Gottlob Frege, deux logiciens-mathématiciens fondateurs de la logique symbolique, alors notre hypothèse a été dès le départ de montrer que, bien que les mathématiques demeurent indispensables dans le dévoilement du réel, la logique, comme science des raisonnements valides, reste la discipline vers laquelle doivent se tourner toutes les sciences, y compris les mathématiques. C'est pourquoi, même si Boole a essayé de traiter algébriquement les raisonnements logiques, très vite nous nous sommes rendu compte que ce projet leibnizien va trouver sa réalisation parfaite dans les travaux de Frege. Donc, au lieu d'une mathématisation de la logique, il serait plus judicieux de privilégier la logicisation des mathématiques. D'ailleurs, les démarches mises en place par l'idéographie frégéenne démontrent parfaitement que ce sont les démarches mathématiques qui ont davantage besoin de la logique et pour cela elles doivent se réduire aux ressources du langage formel de la pensée pure.

Références bibliographiques

BENMAKHLOUF Ali, 2002, *Frege, le nécessaire et le superflu*, Paris, Vrin.

BOOLE George, 1948, *The mathematical analysis of logic*, being an essay towards a calculus of deductive reasoning, Basil Blackwell, Oxford.

BOOLE George, 1992, *Les lois de la pensée*, Traduction et introduction de Souleymane Bachir Diagne, Vrin, Paris.

BLANCHÉ Robert, 1970, *La logique et son histoire, d'Aristote à Russel*, A. Colin, Paris.

FREGE Gottlob, 1971, *Ecrits logiques et philosophiques*, Paris, Seuil.

FREGE Gottlob, 1999, *Idéographie*, Vrin, Paris.

FREGE Gottlob,1996, « Les lois fondamentales de l'arithmétique », Préface et introduction traduites dans J.P. BELNA, *La notion de nombre* *chez Dedekind, Cantor, Frege*, Vrin, Paris.